View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Eldorado - Ressourcen aus und für Lehre, Studium und Forschung

Lucas AMIRAS, Weingarten

Protogeometrie und Geometrieunterricht

1. Grundlagen der Geometrie als Figurentheorie in der Tradition

Bereits mit den ersten Definitionen der Grundfiguren Punkt, Linie und Fläche sowie der Grundformen Gerade und Ebene in den Elementen Euklids wird das Anliegen der Tradition deutlich, die Geometrie als **Figurentheorie** aufzubauen. Der Grund, warum dies nicht in befriedigender Weise gelingt, scheint vor allem in begrifflich-logischen Unzulänglichkeiten der Fassung der Grundbegriffe zu liegen, die auch hinsichtlich anderer Begriffe (z.B. Anordnung, Kongruenz) vorhanden sind. Die theoretische Geometrie in der Form, wie sie Euklid vorführt, ist noch kein System, das begrifflich überzeugend an den Grundfiguren bzw. Grundformen und ihren Beziehungen ansetzt, um als Figurentheorie methodisch aufbauen zu können. Diese Situation blieb bis zum Aufkommen der ersten Axiomatisierungen gegen Ende des 19. Jahrhunderts, die nicht auf dieser Ebene ansetzen, im Wesentlichen unverändert bestehen, trotz des (freilich wenig beachteten) Versuches von N. Lobatschefski, der 1829 mit einem neuen Ansatz die Einführung geometrischer Grundbegriffe versucht hat (dazu Amiras 2003a).

Aus diesen Schwierigkeiten einer mathematischen Charakterisierung der räumlichen Anschauung heraus erfolgte die bereits von C.F. Gauß (anlässlich der Anordnung) angeregte und dann von M. Pasch (1882) und dann D. Hilbert (1899) erreichte, vollständige Axiomatisierung der Geometrie. In Hilberts System fungieren die Grundgegenstände Punkt, Ebene und Gerade als bloße Gegenstandsvariablen, der Bezug zur Anschauung wird zwar nicht geleugnet, wohl aber aus der mathematischen Betrachtung ausgeschlossen. Die offen gebliebene Frage des Bezugs der formalen Geometrie auf den Raum und insbesondere die Interpretation ihrer Grundgegenstände und Relationen durch die teilweise gleichgenannten räumlichen Gegenstände (Ebene, Gerade) wurde nach Hilbert definitiv an die Philosophie bzw. Wissenschaftstheorie der Mathematik verwiesen.

2. Protogeometrie

Bereits im Anhang des Erlanger Programms (Noten No. III, 1872) gab F. Klein die Anregung zur Untersuchung der Grundsätze der räumlichen Anschauung, auch in mathematischer Hinsicht. Hugo Dingler gab später (Dingler 1911) eine Interpretation von Grundbegriffen der Geometrie (Ebene, Kongruenz) auf der Basis von Eigenschaften, die Körpern bei ihrer Bearbeitung aufgeprägt werden, somit Ziele von Herstellungsprozessen formulieren. Dingler versuchte in der Folge im Rahmen einer Theorie räumlicher Figuren auch Axiome der Geometrie zu begründen, was aber als völlig misslungen anzusehen ist. In der Folge bemühte sich die konstruktive Wissenschaftstheorie um P. Lorenzen (von ihm stammte auch die Bezeichnung "Protogeometrie" für dieses Programm) um eine geläuterte Fortsetzung des Dinglerschen Programms mit dem Ziel, die Grundlagen der euklidischen Elementargeometrie als Figurentheorie zu explizieren und darauf basierend eine besser begründete bzw. "motivierte" (P.Bernays) Axiomatik zu errichten. Diese (unter als „protophysikalische“ bzw. „operative Geometriebegründung“ bekannt gewordene) Bemühungen wurden bereits eingehend kritisch untersucht. Im Ergebnis ist man wohl bisher kaum über Ansätze bzw. Fragmente zu einer Figurentheorie hinausgekommen. Diesen Versuchen (die bis zuletzt uneinheitlich geblieben sind) lassen sich aber auch in grundsätzlicher Hinsicht kritische Fragen stellen, so dass eine gründliche Revision des Programms einer Protogeometrie nötig erschien und auch bereits fortgeschritten ist. (Amiras 2003, 2005)

Der neue Ansatz führt (in kritischer Fortsetzung früherer Bemühungen) zunächst zur Explikation von Funktionseigenschaften aus der Praxis der Verwendung von Ebenen (bzw. Grundformen) und versucht dann diese begrifflich exakt zu fassen. Dazu werden Begriffe, welche der geometrischen Rede zu Grunde liegen, in Verbildung mit den damit einhergehenden, sie vermittelnden Phänomenen bzw. technischen Handlungen (operative Begriffsbildung) rekonstruiert. Für Ebene und Gerade z.B. sind dies vor allem Formeigenschaften, die geläufige technische Funktionen von Realisaten dieser Formen formulieren (hier informell mitgeteilt), etwa:

1. **Universelle Passung** (eventuell mit Überlappung) von Matrizen und Kopien (kongruenten Figuren) in jeder festen Berührlage zueinander.

2. **Glattheit** bzw. gegenseitige Verschiebbarkeit von Figuren zueinander bei Passung in Teilstücken.

3. **Erweiterbarkeit** (bei Überlappung) unter Erhaltung von 1. - 2.

4. **Einschränkbarkeit**, d.h. Teilstücke der Figuren erhalten die Eigenschaften 1. - 2.

Dabei ergibt sich jedoch schließlich, dass es keinen guten Sinn macht, auf dieser Grundlage direkt an die Axiomatik der Geometrie heran zu gehen, wie es die bisherigen Entwürfe (ohne Erfolg) versucht haben. Die Analyse der geometrischen Axiomatik legt nämlich die Transformation der Protogeometrie bzw. der herausgestellten Eigenschaften in eine neue Form auf der Basis methodischer Prinzipien bzw. Einsichten, welche die Axiomatik seit der Antike leiten, nahe. Besonders das "Elementprinzip", d.h. der methodische Versuch der theoretischen Konstitution (Definition bzw. Konstruktion) von Figuren aus wenigen Elementarfiguren ist hier wirksam. Es lässt sich nun in einem geeigneten Axiomensystem am Beispiel der Ebene zeigen, wie Eigenschaften aus der Protogeometrie in der theoretischen Geometrie in neuer Form wieder auftreten. (Amiras 2005) Was man damit erreicht, ist eine Einsicht in Sinn und Zweck der axiomatischen Fassung, also ein besseres Verständnis ihrer methodischen Vorzüge, aber auch ihres methodischen Ortes.

3. Auswirkungen auf den Geometrieunterricht

Seit den späten 70er Jahren haben die Bemühungen der konstruktiven Wissenschaftstheorie um P. Lorenzen auch die Aufmerksamkeit der Mathematikdidaktik erregt und zur Vorschlägen geführt, welche u.a. die Einsichten der Protogeometrie betreffend die Bestimmung elementarer geometrischer Begriffe (Ebene, Gerade, Orthogonalität, Parallelität) als Figuren zu verwerten suchen. Zuerst haben sich P. Bender und A. Schreiber intensiv wissenschaftstheoretisch mit diesem Programm auseinandergesetzt und mit dem didaktischen Ansatz einer operativen Geometriedidaktik daran angeknüpft (1978, 1985). In der Folge legten dann K. Krainer (1982) und D. Volk (1984) konkrete Unterrichtsvorschläge zur Behandlung geometrischer Grundbegriffe in der Orientierungsstufe vor.

Die Unterrichtsvorschläge von Krainer und Volk versuchen auf der Grundlage der Protogeometrie u.a. auch ein didaktisches Problem bei der Einführung geometrischer Grundbegriffe (Ebene, Gerade) zu lösen: In geläufigen Zugängen fungieren diese Begriffe nicht so, wie wir es aufgrund unserer Rede erwarten, d.h. als Träger von Formeigenschaften, sondern dienen unterschiedlich realisiert lediglich zur psychologischen Konstitution von vielfältigen Vorstellungen bzw. Anschauungen (vgl. Schulbücher und fachdidaktische Literatur). Die Frage, was diese Anschauungen begrifflich verbindet, lässt sich bisher nicht vernünftig beantworten, weil das Problem selbst in der theoretischen Geometrie keine angemessene Antwort findet.

Volk legt in seinem Lehrgang die Baupraxis als Bezugspraxis, als Erfahrungsbereich für Schüler zu Grunde und versucht aus deren Zwecksetzungen beim Umgang mit geformten Körpern (Bausteinen) geometrische Grundbegriffe als ideelle Formbegriffe zu gewinnen. Die Zwecksetzungen beim Bauen führen im Sinne der operativen Begriffsbildung zu praktischen Forderungen an die Bausteine, die durch ideelle geometrische Begriffe (geometrische Grundformen) formuliert werden können. Auf diese Weise erschließt sich nicht nur ein inhaltliches Verständnis von Figuren, die an Körpern realisiert werden, sondern auch ein Verständnis der Baupraxis im Kontext, als Kulturwissen. Die integrative Sicht seines Lehrgangs, sein fächerübergreifender Charakter und die Projektorientierung sind wichtige

Pluspunkte, das Anspruchsniveau jedoch eher zu hoch für die Orientierungsstufe. (Das ist aber kein grundsätzlicher Punkt.) Krainers Kurs besteht vor allem aus handlungsorientierten Aufgabenstellungen, die Aktivitäten der Schüler initiieren und zu Beobachtungen, Erfahrungen und Begriffsbildungen führen, die ihrerseits als Ausgang für neue Aktivitäten und Überlegungen dienen. Es werden die unterschiedlichen technische Bereiche angesprochen, in welchen geometrische Grundformen technische Funktionen erfüllen. Diese Funktionen werden in Bezug zu Funktionseigenschaften der geometrischen Grundformen gesetzt. Beide Entwürfe empfehlen sich damit Lehrern und Schülern, indem sie Möglichkeiten eröffnen, geometrische Grundbegriffe besser zu erleben und zu verstehen.

4. Ausblick

Ein umfassende Schrift zur Protogeometrie mit eingehenden systematischen, historisch-kritischen und didaktischen Studien ist in Vorbereitung (Amiras 2005). Eine wünschenswert erscheinende Diskussion, Weiterentwicklung und Verbreitung der vorliegenden (leider bisher relativ wirkungslos gebliebenen) Unterrichtsvorschläge könnte unter Einsatz neuer Medien effektiver als bisher gefördert werden. Daher wird parallel zur Schrift die Präsentation des gesamten Spektrums der Protogeometrie (von den Grundlagen der Geometrie und ihrer historischen Perspektive bis zur Didaktik) auf einer Website (www.protogeometrie.de, ab Mai 2005) entwickelt, die als Informationsquelle und Forum allen Interessierten, insbesondere natürlich Lehrern und Schülern dienen soll.-

Literatur

Amiras, L., 2003:"Die Grundlagen der Geometrie in der Protophysik - kritische Retrospektive und neue Perspektive", in: *Konstanzer-Online-Publikations-System (KOPS)*, Aufsatz, Fachbereich Philosophie, Konstanz, Februar 2003.

Amiras, L., 2003a: Lobatschefskis Anfangsgründe der Geometrie als Figurentheorie. In: Phil. naturalis, 40, 127-153.

Amiras, L., 2005: Protogeometrie (wird veröffentlicht).

Bender, P.; Schreiber, A., 1985: *Operative Genese der Geometrie.* Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Universität für Bildungswissenschaften in Klagenfurt, Band 12. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Klein, F., 1872, *Vergleichende Untersuchungen über neuere geometrische Forschungen* ("Erlanger Programm"), Erlangen. Reprint der Ausgabe Leipzig, 3. Auflage, Frankfurt a.M., 1977.

Volk, D., 1984: *Geometrie aus dem Handwerk. Genauer hinschauen beim Mauern und Häuserbauen*. Göttingen.

Krainer, K.: Umwelterschliessung im Geometrieunterricht. Klagenfurt 1982.